

Đề tham khảo 2:

Bài 1: cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Xác định $A^T + 2B$.

$$\begin{aligned} -A^T + 2B &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Ma trận A có khả nghịch không? Tìm A^{-1}

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Tồn tại } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) = 1$$

Tương tự: $A_{21} = -6$ $A_{31} = -5$

$A_{22} = -4$ $A_{32} = -3$

$A_{23} = -1$ $A_{33} = -1$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $X \cdot A = B$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 5 \\ 11 & -8 & 7 \\ -25 & 19 & 16 \end{pmatrix}$$

Thu' máy:

Mod 6 1 1 (nhập A)

AC shij 4 1 2 1 (nhập B)

• AC shij 4 8 shij 4 3)
+ 2x shij 4 4 \square Kquá

Màn hình:

Trn(MatA) + 2x MatB

* tiếp câu a:

AC shij 4 7 shij 4.3 \square

Màn hình: det(MatA)

* Tìm $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

AC shij 4 7 shij 4.3) x
shij 4 8 x \square Kquá

* Tìm A^{-1}

AC shij 4.3 x \square Kquá

• $X \cdot A = B$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot I = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

(nhân A^{-1} bên phải

$X \cdot A$ thì nhân A^{-1} bên phải B)

AC shij 4 4 x shij 4.3 x \square

\square Kquá

Câu 2: Biến đổi theo m hàng của ma trận.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & m & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 \leftrightarrow d_3 \\ d_2 \leftrightarrow d_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & m & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} d_2 \rightarrow d_2 + d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1 \\ d_4 \rightarrow d_4 - 2d_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & m+2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \rightarrow \frac{d_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & m+2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} d_3 \rightarrow d_3 - d_2 \\ d_4 \rightarrow d_4 - d_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & m+2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & m+2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$d_4 \rightarrow d_4 - (m+2)d_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3m \end{pmatrix}$$

$3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow R(A) = 3$

$3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \Rightarrow R(A) = 4$

Vậy $m = 0 \Rightarrow R(A) = 3$

$m \neq 0 \Rightarrow R(A) = 4$

Câu 3: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - y - 4z = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

B1) chuyển hàng 1
hệ số $\neq 0$ đầu tiên $= 1$ $d_1 \leftrightarrow d_3$
- đưa hàng có hệ số m xuống dưới
 $d_2 \leftrightarrow d_4$

B2) hệ số $\neq 0$ đầu tiên hàng 1 là 1
3 hệ số $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
 $\Rightarrow d_2, d_3, d_4$ thay đổi số đứng 1

B3) $\frac{d_2}{2}$ để hệ số $\neq 0$ đầu tiên $= 1$

B4) hệ số $\neq 0$ đầu tiên dòng 2 là 1
2 hệ số còn lại $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow d_3, d_4$ thay đổi số d2.

B5) $d_3 \rightarrow d_3/3$ để chuyển hệ số $\neq 0$ đầu tiên $= 1$.

- Hệ số $\neq 0$ đầu tiên dòng 3 $= 1$
2 hệ số còn lại $m+2=0$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow d_2 + 2d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 + 3d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{hệ } \begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 5y + 5z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = \alpha \Rightarrow y = \frac{4 - 5\alpha}{5} = \frac{4}{5} - \alpha$$

$$\begin{aligned} x &= 2y + 3z - 1 = \frac{8}{5} - 2\alpha + 3\alpha - 1 \\ &= \frac{3}{5} + \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{no hệ } (x, y, z) = \left(\frac{3}{5} + \alpha; \frac{4}{5} - \alpha; \alpha \right) \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

câu 4: Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1} \quad (1^\infty)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1) \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 1} - 1 \right)}$$

$$* y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \quad (1^\infty)$$

$$\ln y = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln(f(x))$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) (f(x) - 1)$$

$$y = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) (f(x) - 1)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1) \cdot (-x+2)}{x^2+x-1}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+5x-2}{x^2+x-1}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{L^1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cos x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{L^1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cdot \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(2-x^2) \sin x + 4x \cos x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{L^1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-2x \cdot \sin x + \cos x (2-x^2) + 4 \cdot \cos x - 4x \sin x}$$

$$= \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$$

* quy đồng $\left(\frac{0}{0} \right)$
 cho cơ dạng $\left(\frac{0}{0} \right)$
 rồi dùng quy tắc
 L'Hopital.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Case 5: tìm cực trị $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$

TXD: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = f'(x) = \frac{-2 \cdot \sqrt{x^2+1} - (1-2x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) - x(1-2x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

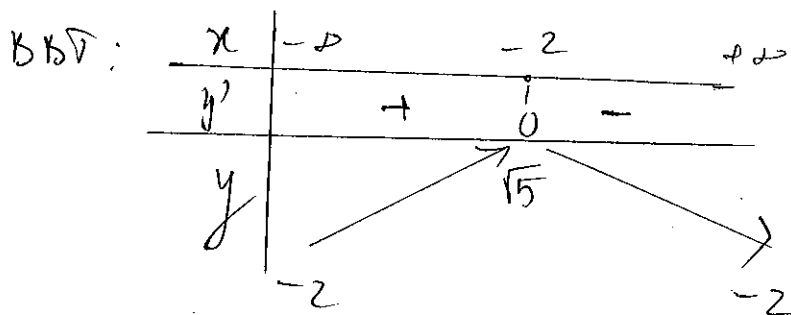
$$= \frac{-2x^2 - 2 - x + 2x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{-(x+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-x-2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -2$$



\Rightarrow hàm số đạt cực đại tại $x = -2$

$$M_{\text{cđ}} = \sqrt{5}$$

D) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$:

$$y = f(x) = x - 2 \ln x \text{ trên } \left[\frac{3}{2}; e\right]$$

